

# Biblioteka do operacji na macierzach w C++ przy użyciu obliczeń za pomocą OpenMP

Bartłomiej Kwiatek

## Streszczenie

Projekt zrealizowany w ramach przedmiotu Programowanie Równoległe i Rozproszone.

## Spis treści

<b>1</b>	<b>Wstęp</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Opis biblioteki</b>	<b>3</b>
2.1	Zależności . . . . .	4
2.1.1	Zrównoleglanie . . . . .	4
2.1.2	Obsługa wyjątków . . . . .	4
2.1.3	Generator liczb pseudolosowych . . . . .	4
2.2	Metody główne . . . . .	5
2.2.1	Tworzenie macierzy . . . . .	5
2.2.2	Macierz jedynek . . . . .	5
2.2.3	Macierz zerowa . . . . .	5
2.2.4	Macierz diagonalna . . . . .	6
2.2.5	Losowanie elementów macierzy . . . . .	6
2.2.6	Współczynniki macierzy . . . . .	7
2.3	Obliczenia na macierzach . . . . .	7
2.3.1	Operacje ze skalarami . . . . .	7
2.3.2	Sumowanie i odejmowanie macierzy . . . . .	8
2.3.3	Mnożenie macierzy . . . . .	8
2.3.4	Dzielenie macierzy . . . . .	9

2.4	Obliczenia na pojedynczej macierzy . . . . .	9
2.4.1	Wyznacznik i minor . . . . .	9
2.4.2	Macierz odwrotna . . . . .	10
2.5	Metody pomocnicze . . . . .	10
2.5.1	Pobieranie rozmiaru macierzy . . . . .	10
2.5.2	Wyświetlanie macierzy . . . . .	11

<b>Literatura</b>		<b>12</b>
-------------------	--	-----------

# 1 Wstęp

Celem tej biblioteki jest dostarczenie programiście narzędzia do obliczeń na macierzach. Narzędzie to działa w języku C++ i korzysta z zalet obliczeń równoległych.

**Macierz** W matematyce układ liczb, symboli lub wyrażeń zapisanych w postaci prostokątnej tablicy. Najczęściej macierz jest dwuwskaźnikowa, lecz możliwe jest rozpatrywanie macierzy wielowskaźnikowych. Macierze jednowskaźnikowe nazywa się często wektorami wierszowymi lub kolumnowymi, co wynika z zastosowań macierzy w algebrze liniowej. W informatyce macierze modeluje się zwykle za pomocą tablic. [11]

W tym projekcie będą stosowane macierze jedno- i dwuwskaźnikowe.

**OpenMP** To wieloplatformowy interfejs programowania aplikacji umożliwiający tworzenie programów komputerowych dla systemów wieloprocesorowych z pamięcią dzieloną. Celem OpenMP jest implementacja wielowątkowości, czyli metody zrównoleglania programów komputerowych, w której główny "wątek programu"(czyli ciąg następujących po sobie instrukcji) żozgałęzi- a się na kilka "wątków potomnych", które wspólnie wykonują określone zadanie. Wątki pracują współbieżnie i mogą zostać przydzielone przez środowisko uruchomieniowe różnym procesorom. Wykonywanie programu przy użyciu OpenMP jest szybsze niż metodą sekwencyjną. Podczas przetwarzania równoległego oczekiwane jest przyspieszenie N-krotne na N procesorowej plat- formie. W praktyce rzadko ma to miejsce. [9]

## 2 Opis biblioteki

Biblioteka do obsługi macierzy składa się z:

- konstruktorów macierzy oraz destruktora (alokacja i czyszczenie pamięci)
- metod do podstawowych działań na macierzach i skalarach (dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie)
- metod do obliczeń własności macierzy
- metod pomocniczych (wyświetlanie wyników)

Klasa *Matrix()* jest klasą szablonową, dzięki czemu przy deklaracji można ustalić typ wartości współczynników macierzy.

Wszystkie zmienne określające rozmiar macierzy (np. `rows` i `cols`) są typu `unsigned long`.

Dodatkowe przykłady działania można znaleźć w pliku `samplemain.cpp`

Biblioteka bazuje projekcie użytkownika *joske* [1]

## 2.1 Zależności

Klasa *Matrix()* wymaga użycia dodatkowych klas wspierających jej działanie.

### 2.1.1 Zrównoleglanie

Klasa *Matrix()* jest zrównoleglana przy użyciu środowiska *OpenMP*. Deklaracja ilości wątków programu jest wykonywana przez klasę *Pararell()*, która przedstawia się w całej bibliotece jako obiekt *para*. Bez deklaracji ilości wątków lub po deklaracji wartości ujemnej niektóre metody klasy *Matrix()* nie będą działać - zostanie wyrzucony wyjątek.

```
para.setThreads(4); // ustawienie 4 wątków
```

Dodatkowo, można ustawić wyświetlanie czasu wykonywania obliczeń równoległych za pomocą debuggera:

```
para.setDebug(true); // włączanie debugera  
para.setDebug(false); // wyłączanie debugera
```

Domyślnie ilość wątków jest ustawiona na zero, a debugger jest wyłączony.

### 2.1.2 Obsługa wyjątków

Wywołanie wyjątku powoduje wyświetlenie podanego komunikatu:

```
throw Exception("Treść komunikatu.");
```

### 2.1.3 Generator liczb pseudolosowych

Biblioteka wykorzystuje generator Mersenne Twister (zostawanie opisane w sekcji 2.2.5).

## 2.2 Metody główne

W tej sekcji opisane są główne metody do tworzenia macierzy, w tym macierzy zerowej, jedynek i diagonalnej.

### 2.2.1 Tworzenie macierzy

**Opis** Macierz można utworzyć na trzy sposoby:

1. deklaracja macierzy bez zawartości - używając konstruktora bez parametrów lub pomijając prawą część deklaracji:

```
Matrix<double> A = Matrix();  
Matrix<double> B;
```

2. deklaracja macierzy z określoną ilością wierszy i kolumn - używając konstruktora z parametrami *Matrix(const unsigned long row\_count, const unsigned long column\_count)*:

```
Matrix<double> A = Matrix(rows, cols);
```

3. deklaracja macierzy jako kopia innej macierzy - używając konstruktora *Matrix(const Matrix& A)*:

```
Matrix<double> A;  
Matrix<double> B = Matrix<double> (A);  
Matrix<double> C = A;
```

### 2.2.2 Macierz jedynek

**Opis** Macierz, której wszystkie współczynniki są równe jeden.

#### Przykład

```
Matrix<double> A = Ones<double>(rows, cols);
```

### 2.2.3 Macierz zerowa

**Opis** Macierz, której wszystkie współczynniki są równe zero. Oznaczana często dużą grecką literą  $\Theta$  (theta) lub wytłuszczonym symbolem  $\mathbf{0}$  (zero), czasami z informacją w indeksie o typie macierzy, np.  $\Theta_{n \times m}$  lub  $\mathbf{0}_{n \times m}$ . [5]

## Przykład

```
Matrix<double> A = Zero<double>(rows, cols);
```

Warto zwrócić uwagę, że wywołanie konstruktora *Matrix(rows, cols)* działa tak samo jak wywołanie metody macierzy zerowej.

### 2.2.4 Macierz diagonalna

**Opis** Macierz, zwykle kwadratowa, której wszystkie współczynniki leżące poza główną przekątną (główną diagonalą) są zerowe. Inaczej mówiąc jest to macierz górno- i dolnotrójkątna jednocześnie. [3]

**Metoda** Macierz można utworzyć na dwa sposoby:

1. jako macierz kwadratowa o zadanym rozmiarze zawierająca jedynki na przekątnej:

```
Matrix<double> A = Diag<double>(size);
```

2. jako macierz kwadratowa zawierająca współczynniki wektora na przekątnej, przy czym rozmiar macierzy diagonalnej to długość wektora:

```
Matrix<double> V1 = Matrix<double> (rows,1); // wektor pionowy  
Matrix<double> Diag1 = Diag<double>(V);  
Matrix<double> V2 = Matrix<double> (1,cols); // wektor poziomy  
Matrix<double> Diag2 = Diag<double>(V);
```

### 2.2.5 Losowanie elementów macierzy

**Opis** Metoda *Randomize()* uzupełnia współczynniki macierzy losowymi wartościami używając biblioteki MT19937. [2]

**Przykład** Metoda ta jest wykonywana przy użyciu OpenMP.

```
Matrix<double> A(rows,cols);  
A.Randomize();
```

## 2.2.6 Współczynniki macierzy

```
A(2,3) = 5.6;           // ustawienie elementu macierzy A
value = A(3,1);        // pobranie elementu macierzy A
value = A.get(3,1);    // pobranie elementu macierzy A
A = B;                 // kopiowanie zawartości macierzy B do macierzy A
```

## 2.3 Obliczenia na macierzach

Dla ułatwienia operacji na macierzach i skalarach zastosowane zostały mapowania operatorów, dlatego poniższe działania można wykonywać następująco:

```
A = B + C;
A = B - C;
A = -B;
A = B * C;
A = B / C;
```

Wszystkie poniższe operacje są wykonywane przy użyciu OpenMP.

### 2.3.1 Operacje ze skalarami

**Opis** Dodawanie (odejmowanie, mnożenie lub dzielenie) macierzy  $A = (a_{ij})$  i skalaru  $r$  daje w wyniku sumę (różnicę, iloczyn lub iloraz)  $r \circ A$  będącą macierzą tego samego typu co  $A$ . Jej współczynniki dane są wzorem

$$(r \circ A)_{ij} = r \circ a_{ij} \quad (1)$$

przy czym znak  $\circ$  oznacza odpowiednie działanie matematyczne. [10]

### Przykład

```
double number;
Matrix<double> A; // deklaracja macierzy
A.Add(number);   // dodawanie liczby rzeczywistej
A.Subtract(number); // odejmowanie liczby rzeczywistej
A.Multiply(number); // mnożenie przez liczbę rzeczywistą
A.Divide(number); // dzielenie przez liczbę rzeczywistą
```

### 2.3.2 Sumowanie i odejmowanie macierzy

Suma (różnica) macierzy jest wykonalna dla macierzy o tych samych wymiarach. Aby dodać (odjąć) dwie macierze, dodajemy (odejmujemy) do siebie elementy o tych samych współrzędnych:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & \cdots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & \cdots & a_{2n} \pm b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & a_{m2} \pm b_{m2} & \cdots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{bmatrix} \quad (2)$$

Z określenia tego bezpośrednio wynika, że własności dodawania (odejmowania) macierzy są takie same, jak własności struktury, nad którą macierz jest zbudowana - jeżeli dodawanie (odejmowanie) składowych jest łączne, to łączne jest również dodawanie (odejmowanie) macierzy itd. [4]

### 2.3.3 Mnożenie macierzy

Działanie to (Mnożenie Cauchy'ego) zdefiniowane jest wyłącznie dla macierzy, z których pierwsza ma tyle kolumn, co druga wierszy. Jeżeli  $A$  jest macierzą  $n \times m$ , a  $B$  to macierz typu  $m \times p$ , to ich iloczyn, oznaczany  $AB$ , czasem też  $A \cdot B$ , jest macierzą o wymiarach  $n \times p$ . Jeżeli  $C = AB$ ,  $c_{i,j}$  oznacza element  $C$  na pozycji  $(i, j)$ , to:

$$c_{i,j} = \sum_{r=1}^m a_{i,r}b_{r,j} = a_{i,1}b_{1,j} + a_{i,2}b_{2,j} + \cdots + a_{i,m}b_{m,j} \quad (3)$$

dla każdej pary  $i, j$  dla której  $1 \leq i \leq n$  oraz  $1 \leq j \leq p$ .

Mnożenie macierzy nie jest w ogólności przemienne, tj.  $AB \neq BA$ . Można zaobserwować to następująco: nie można spodziewać się, iż zmiana proporcji wektorów da ten sam wynik. Innym sposobem jest też zwrócenie uwagi na kolejność czynników – liczba kolumn w macierzy proporcji musi być równa liczbie wierszy w macierzy wektorów: muszą one reprezentować tę samą liczbę wektorów. Przypadkiem szczególnym jest np. mnożenie macierzy diagonalnych równego stopnia, które jest przemienne. [10]



### 2.3.4 Dzielenie macierzy

Dzielenie macierzy  $A$  przez macierz  $B$  sprowadza się do mnożenia przez macierz odwrotną:

$$A/B = A * B^{-1} \quad (4)$$

## 2.4 Obliczenia na pojedynczej macierzy

Ta sekcja opisuje metody do obliczania własności pojedynczej macierzy.

### 2.4.1 Wyznacznik i minor

**Definicja wyznacznika** W algebrze liniowej, funkcja przyporządkowująca każdej macierzy kwadratowej  $M$ , o współczynnikach z pierścienia przemiennego  $R$  (w szczególności, ciała liczb rzeczywistych czy zespolonych), pewien element tego pierścienia (oznaczany symbolem  $\det M$ ), która spełnia następujące warunki:

wartością tej funkcji na macierzy 1x1  $[a]$  jest  $a$ , jeśli

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

jest macierzą kwadratową stopnia  $n > 1$ , to wartość tej funkcji dla macierzy

$$M = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det M_{i,j} \quad (5)$$

gdzie  $j$  jest dowolną liczbą naturalną z zakresu  $1 \leq j \leq n$ , a przez  $M_{i,j}$  oznaczamy macierz stopnia  $n-1$ , powstałą z macierzy  $M$  poprzez skreślenie  $i$ -tego wiersza i  $j$ -tej kolumny (por. minor).

Funkcja o powyższych własnościach wyznaczona jest jednoznacznie. Wyznacznikiem macierzy  $M$  nazywamy wartość  $\det M$  tej funkcji dla macierzy  $M$ .

Wyznacznik można również traktować jako funkcję, nie samej macierzy, a jej współczynników:  $a_{11}, \dots, a_{1n}, \dots, a_{n1}, \dots, a_{nn}$ . Jest on wówczas wielomianem  $n^2$  zmiennych o współczynnikach z  $R$ . [8]

**Definicja minora** Wyznacznik macierzy kwadratowej powstałej z danej macierzy przez skreślenie pewnej liczby jej wierszy i kolumn. [6]

**Przykład** Metoda ta NIE jest wykonywana przy użyciu OpenMP, ponieważ zrównoleglenie jest wykonywane przy obliczaniu minora macierzy.

```
Matrix<double> A; // definicja macierzy
double det = Det(A); // obliczenie wyznacznika
```

## 2.4.2 Macierz odwrotna

**Definicja** Niech  $A$  będzie macierzą kwadratową ustalonego stopnia. Macierz  $A$  jest odwracalna, jeśli istnieje taka macierz  $B$ , że zachodzi

$$AB = BA = I \quad (6)$$

gdzie  $I$  jest macierzą jednostkową. Jeżeli taka macierz  $B$  nie istnieje, to macierz  $A$  nazywamy nieodwracalną, w przeciwnym wypadku macierz  $B$  nazywa się macierzą odwrotną do macierzy  $A$  i oznacza się ją wówczas przez  $A^{-1}$ . [7]

**Przykład** Metoda ta jest wykonywana przy użyciu OpenMP.

```
Matrix<double> A;
Matrix<double> B = Inv<double>(A);
```

## 2.5 Metody pomocnicze

Na koniec przedstawione są metody do pobierania, wyświetlania i losowania elementów macierzy.

### 2.5.1 Pobieranie rozmiaru macierzy

**Przykład**

```
cols = A.GetCols();
cols = Size(A, 1);
rows = A.GetRows();
rows = Size(A, 2);
```

## 2.5.2 Wyświetlanie macierzy

**Przykład** Użycie metody *Print()* spowoduje pokazanie zawartości macierzy w następujący sposób:

A =

[3.60, 0.45, 0.24;

3.60, 0.45, 0.24;

3.60, 0.45, 0.24]

## Literatura

- [1] Determinant of Matrix in C++. [online: [//www.dreamincode.net/forums/topic/55772-determinant-of-matrix-in-c/page\\_\\_view\\_\\_findpost\\_\\_p\\_\\_966121?s=7b75a2ff0e9ac9602d4e322b8477bb68](http://www.dreamincode.net/forums/topic/55772-determinant-of-matrix-in-c/page__view__findpost__p__966121?s=7b75a2ff0e9ac9602d4e322b8477bb68)], marzec 2010. [dostęp: 2012-07-04 10:43Z].
- [2] Monte Carlo-simuloinnit, 2+2 ov (4+4 op) / Monte Carlo simulations, 2+2 sw (4+4 op). [online: [//beam.acclab.helsinki.fi/~knordlun/mc/](http://beam.acclab.helsinki.fi/~knordlun/mc/)], wiosna 2006. [dostęp: 2012-07-05 13:16Z].
- [3] Macierz diagonalna. [online: [//pl.wikipedia.org/wiki/Macierz\\_diagonalna?oldid=26376309](http://pl.wikipedia.org/wiki/Macierz_diagonalna?oldid=26376309)], maj 2011. [dostęp: 2012-07-06 19:58Z].
- [4] Dodawanie macierzy. [online: [//pl.wikipedia.org/wiki/Dodawanie\\_macierzy?oldid=27775398](http://pl.wikipedia.org/wiki/Dodawanie_macierzy?oldid=27775398)], sierpień 2011. [dostęp: 2012-07-07 08:48Z].
- [5] Macierz zerowa. [online: [//pl.wikipedia.org/wiki/Macierz\\_zerowa?oldid=28431393](http://pl.wikipedia.org/wiki/Macierz_zerowa?oldid=28431393)], październik 2011. [dostęp: 2012-07-06 19:28Z].
- [6] Minor. [online: [//pl.wikipedia.org/wiki/Minor?oldid=28431556](http://pl.wikipedia.org/wiki/Minor?oldid=28431556)], październik 2011. [dostęp: 2012-07-07 07:46Z].
- [7] Macierz odwrotna. [online: [//pl.wikipedia.org/wiki/Macierz\\_odwrotna?oldid=29649343](http://pl.wikipedia.org/wiki/Macierz_odwrotna?oldid=29649343)], styczeń 2012. [dostęp: 2012-07-07 08:05Z].
- [8] Wyznacznik. [online: [//pl.wikipedia.org/wiki/Wyznacznik?oldid=30194835](http://pl.wikipedia.org/wiki/Wyznacznik?oldid=30194835)], marzec 2012. [dostęp: 2012-07-07 07:59Z].
- [9] OpenMP. [online: [//pl.wikipedia.org/wiki/OpenMP?oldid=31087652](http://pl.wikipedia.org/wiki/OpenMP?oldid=31087652)], maj 2012. [dostęp: 2012-07-07 10:09Z].
- [10] Mnożenie macierzy. [online: [//pl.wikipedia.org/wiki/Mno%C5%BCenie\\_macierzy?oldid=31088583](http://pl.wikipedia.org/wiki/Mno%C5%BCenie_macierzy?oldid=31088583)], maj.
- [11] Macierz. [online: [//pl.wikipedia.org/wiki/Macierz?oldid=31350222](http://pl.wikipedia.org/wiki/Macierz?oldid=31350222)], maj 2012. [dostęp: 2012-07-07 09:59Z].